ملخصي وقواعدي في الرياضيات لمستوى الأولى باك آداب

من انجاز : الأستاذ نجيب عثماني أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تأهيلي

ملخص درس المنطق

العبارات: نسمي عبارة كل نص رياضي يحمل معنى يكون إما صحيحا و إما خاطئا و نرمز عادة لعبارة بأحد الرموز p أو q أو r ......

غالبا ما نعبر عن حقيقة عبارة بجدول يسمى جدول حقيقة عبارة : الرمز 1 يعني أن العبارة p صحيحة و الرمز 0 يعني أن العبارة p خاطئة

العمليات على العبارات:

1)نفي عبارة: نرمز لنفي العبارة p بالرمز $\overline{p}$ وتكون صحيحة إذا كانت p خاطئة و تكون خاطئة إذا كانت p صحيحة

وجدول حقيقة عملية النفي هو : **الجدول 1**

2)عطف عبارتين:عطف عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(p$ و $q)$ والتي تكون صحيحة فقط ا إذا كانت العبارتان p و q صحيحتين معا

و جدول حقيقة العطف المنطقي هو : **الجدول 2**

3)فصل عبارتين:فصل عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(p$ أو $q)$ والتي تكون خاطئة فقط إذا كانت العبارتان p و q خاطئتين معا

و جدول حقيقة الفصل المنطقي هو : **الجدول 3**

4)استلزام عبارتين: استلزام عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(p \Rightarrow q)$ والتي تكون خاطئة فقط اذا كانت p صحيحة و q خاطئة

وجدول حقيقة الاستلزام المنطقي هو : **الجدول 4**

ملاحظات:العبارة : $(p \Rightarrow q)$ تقرأ : " p تستلزم q " أو " اذا كانت p فان q "

العبارة : $(q \Rightarrow p)$تسمى الاستلزام العكسي للاستلزام $(p \Rightarrow q)$

للبرهان أن العبارة : $(p \Rightarrow q)$صحيحة نفترض أن العبارة p صحيحة و نبين أن العبارة q صحيحة

نتيجة:العبارتان $(p \Rightarrow q)$ و q أو $\overline{p}$ متكافئتان

5)تكافؤ عبارتين: تكافؤ عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(p \Leftrightarrow q)$والتي تكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتان p و q صحيحتين معا أو خاطئتين معا. وجدول حقيقة الاستلزام المنطقي هو: **الجدول5**

العبارة : $(p \Leftrightarrow q)$تقرأ : " p تكافئ q "

جدول5 هوحقيقة التكافؤ المنطقي

خاصية : العبارتان $(p \Leftrightarrow q)$ و $[(p \Rightarrow q)$ و $(q \Rightarrow p)]$ متكافئتان

الدالة العبارية:نسمي دالة عبارية كل نص رياضي يحتوي على متغير (أو عدة متغيرات) ينتمي إلى مجموعة معلومة E حيث تصبح عبارة كلما عوضنا المتغير بعنصر من E ونرمز عادة لدالة عبارية بالرمز $A(x)$ أو $B(x)$ أو $A(x;y)$

العبارات المكممة:انطلاقا من الدالة العبارية $A(x)$ نكون العبارة " $\exists x \in E , A(x)$ " ونقرأ : " يوجد على الأقل x من E يحقق الخاصية $A(x)$ " وتكون العبارة " $\exists x \in E , A(x)$" صحيحة إذا وجد على الأقل x من E يحقق الخاصية $A(x)$

انطلاقا من الدالة العبارية $A(x)$ نكون العبارة " $\forall x \in E , A(x)$" ونقرأ : "مهما يكن x من E لدينا $A(x)$"

وتكون العبارة " $\forall x \in E , A(x)$ " صحيحة إذا كانت جميع عناصر E تحقق الخاصية $A(x)$.

خاصية : نفي العبارة " $\forall x \in E , A(x)$ "هو العبارة " $\exists x \in E , \overline{A(x)}$ "

نفي العبارة " $\exists x \in E , A(x)$ " هو العبارة " $\forall x \in E , \overline{A(x)}$ "

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

الجدول 1

p	q	p و q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

الجدول 2

p	q	p أو q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

الجدول 3

p	q	$(p \Rightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

الجدول 4

p	q	$(p \Leftrightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

الجدول 5

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

I. المكممات

1.العبارات المكممة

انطلاقا من الدالة العبارية $A(x)$ نكون العبارة " $\exists x \in E , A(x)$ " ونقرأ : " يوجد على الأقل x من E يحقق الخاصية $A(x)$ " وتكون العبارة " $\exists x \in E , A(x)$ " صحيحة إذا وجد على الأقل x من E يحقق الخاصية $A(x)$

انطلاقا من الدالة العبارية $A(x)$ نكون العبارة " $\forall x \in E , A(x)$ " ونقرأ : " مهما يكن x من E لدينا $A(x)$" وتكون العبارة " $\forall x \in E , A(x)$ " صحيحة إذا كانت جميع عناصر E تحقق الخاصية $A(x)$.

مثال1: حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

1. $\forall x \in \mathbb{R} / x \geq 0$
2. " $\exists x \in \mathbb{N}, 2x - 4 = 0$ "
3. " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$
4. $(\forall n \in \mathbb{N}); \sqrt{n} \in \mathbb{N}$
5. $(\exists x \in \mathbb{Z}); \frac{x}{4} \in \mathbb{Z}$

الأجوبة: 1) صحيحة 2) صحيحة 3) خاطئة 4) خاطئة 5) صحيحة

مثال2: حدد العبارة النافية للعبارات الآتية :

1) $(\forall n \in \mathbb{N}); \sqrt{n} \in \mathbb{N}$ 2) $x^2 - 2 = 0$ و $(\exists x \in \mathbb{Z}): \frac{x}{4} \in \mathbb{Q}$

3) توجد نافذة في المؤسسة مكسورة

4) كل الأشجار غير مثمرة في المؤسسة

الأجوبة: 1) $(\exists n \in \mathbb{N}); \sqrt{n} \notin \mathbb{N}$

2) $x^2 - 2 \neq 0$ أو $(\forall x \in \mathbb{Z}): \frac{x}{4} \notin \mathbb{Q}$

3) كل نوافذ المؤسسة غير مكسورة

4) توجد شجرة مثمرة في المؤسسة

II. الاستدلالات الرياضية

1. الاستدلال الاستنتاجي :

مثال : ليكن $x \in \mathbb{R}$ بين أن : $\sqrt{2} < x < 5 \Rightarrow 3 < x^2 + 1 < 26$

الأجوبة :نفترض أن : $\sqrt{2} < x < 5$ ونبين أن : $3 < x^2 + 1 < 26$

لدينا : $\sqrt{2} < x < 5$ اذن : $2 < x^2 < 25$

اذن : $3 < x^2 + 1 < 26$

ومنه : $\sqrt{2} < x < 5 \Rightarrow 3 < x^2 + 1 < 26$

2. الاستدلال بالمثال المضاد :

مثال : بين العبارة التالية خاطئة مع تعليل الجواب:

p " $(\forall x \in \mathbb{R}^*); x + \frac{1}{x} \geq 2$ "

الجواب : نعتبر : $x = -2$ لدينا : $-2 + \frac{1}{-2} = -\frac{5}{2} < 2$ اذن : p خاطئة

3. الاستدلال بالتكافؤ:

مثال: بين أن : $(\forall a \in \mathbb{R}); (\forall b \in \mathbb{R})\ \ a^2 + b^2 \geq 2ab$

الجواب :نستعمل الاستدلال بالتكافؤ:

$a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$

و هذا صحيح لأن المربع دائما موجب

وبالتالي : $(\forall a \in \mathbb{R}); (\forall b \in \mathbb{R})\ \ a^2 + b^2 \geq 2ab$

4. الاستدلال بفصل الحالات :

مثال: باستعمال الاستدلال بفصل الحالات: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة :

$(E): |3x - 6| = 1$

الجواب :ندرس اشارة : $3x - 6$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$3x-6$	$-$	0	$+$

الحالة 1: اذا كانت : $x \geq 2$ فان : $3x - 6 \geq 0$ ومنه :

$(E): |3x - 6| = 1$

$\Leftrightarrow 3x - 6 = 1 \Leftrightarrow 3x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3} \in S$

الحالة 2: اذا كانت : $x \leq 2$ فان : $3x - 6 \leq 0$ ومنه :

$(E): |3x - 6| = 1$

$\Leftrightarrow -(3x - 6) = 1 \Leftrightarrow -3x + 6 = 1 \Leftrightarrow -3x = -5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \in S$

ومنه مجموعة الحلول هي : $S = \left\{\frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right\}$

5. الاستدلال بالخلف :

لكي نبرهن أن عبارة صحيحة نفترض أن العبارة خاطئة ونحاول الحصول على تناقض مع المعطيات

مثال1: بين باستعمال الاستدلال بالخلف أن : $\forall x \in \mathbb{R} / \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \neq 1$

الجواب : نفترض أن : $\exists x \in \mathbb{R} / \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$

يعني $x^2 - 1 = x^2 + 1$ يعني $-1 = +1$ وهذا غير صحيح

ومنه ما افترضناه كان خاطئا أي : $\forall x \in \mathbb{R} / \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \neq 1$